École Nomale Supérieure Paris
Sélection Internationale 2015
Épreuve de mathématique principale

Exercice 1

Soient $d, n \geq 1$ des entiers, et $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ des difféomorphismes pour lesquels il existe une constante $0 < c < 1$ telle que

$$|||Df_i(x)||| \leq c$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $i = 1, \ldots, n$. Ici $Df_i(x)$ signifie la dérivée de f_i en x et $|||.|||$ signifie la norme d'opérateur associée à la norme euclidienne, à savoir pour tout $M \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^d)$

$$|||M||| = \sup_{x \in \mathbb{R}^d, x \neq 0} \frac{||Mx||}{||x||} \text{ où } ||(x_1, \ldots, x_n)|| = \sqrt{\sum_i x_i^2}.$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un unique compact non vide $K \subset \mathbb{R}^d$ tel que

$$K = \bigcup_{i=1,\ldots,n} f_i(K) \tag{1}$$

et d'étudier ses propriétés.

1. Montrer que si $n = 1$ il existe un unique ensemble compact non vide K vérifiant (1). De quelle nature est-il ?

2. On introduit l'ensemble $\mathcal{K}$ des ensembles compacts non vides de $\mathbb{R}^d$, que l'on munit de la distance de Hausdorff, définie par

$$d(K_1, K_2) := \inf\{\varepsilon > 0 \mid K_1 \subset K_2^\varepsilon \text{ and } K_2 \subset K_1^\varepsilon\},$$

où $K^\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d \mid d(x, K) \leq \varepsilon\}$. Montrer que $(\mathcal{K}, d)$ est un espace métrique complet.

3. Montrer qu'il existe un unique ensemble compact non vide K satisfaisant (1).

4. Soient $n = d = 2$ et $f_1, f_2 : \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ des applications affines complexes de la forme

$$f_1(z) = \lambda z + 1 \text{ et } f_2(z) = \lambda z - 1 \text{ pour } z \in \mathbb{C},$$

où $\lambda \in \mathbb{C}$ est un nombre complexe de module $0 < |\lambda| < 1$. Montrer que si $|\lambda| < 1/2$, alors K est non connexe, et que ses composantes connexes sont des points.

5. (Théorème de Bousch) Montrer que, au contraire, si $|\lambda| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors K est connexe. *Indication : pour montrer le théorème de Bousch, vous pouvez commencez par montrer que si $|\lambda| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors $f_1(K) \cap f_2(K) \neq \emptyset$.*

Exercice 2

Soit n un nombre entier strictement positif, et soit E un espace vectoriel complexe de dimension n. Notons $\mathcal{L}(E)$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E, et notons E^* l'espace dual de E. L'espace vectoriel des endomorphismes de E^* est noté $\mathcal{L}(E^*)$.

Considérons un sous-espace vectoriel $A \subset \mathcal{L}(E)$ tel que A contienne l'endomorphisme identité et A soit stable par composition. Posons $A^* = \{a^* \mid a \in A\} \subset \mathcal{L}(E^*)$, où a^* est l'endomorphisme transposé de a.

Pour tout vecteur $v \in E$, notons $A(v)$ l'ensemble $\{a(v) \mid a \in A\} \subset E$, et pour tout vecteur $u \in E^*$, notons $A^*(u)$ l'ensemble $\{a^*(u) \mid a^* \in A^*\} \subset E^*$.

Supposons que E ne contienne aucun sous-espace propre $\{0\} \subsetneq F \subsetneq E$ qui soit A-invariant, c'est-à-dire, tel que $a(F) \subset F$ pour tout $a \in A$.

1. Soient $v \in E$ et $u \in E^*$ des vecteurs non nuls. Montrer que $A(v) = E$ et $A^*(u) = E^*$.

2. Soient v_1 et v_2 deux vecteurs de E qui forment une famille libre. Montrer qu'il existe un endomorphisme $a \in A$ tel que $a(v_1) \neq 0$ et $a(v_2) = 0$.
Indication : montrer que, dans le cas contraire, il existerait un endomorphisme $t \in \mathcal{L}(E)$ tel que $t(v_2) = v_1$ et $(t \circ b)(v_2) = (b \circ t)(v_2)$ pour tout b dans A, et trouver une contradiction.

3. Montrer que A contient au moins un endomorphisme de rang 1.

4. Montrer que A contient tous les endomorphismes de rang 1 dans $\mathcal{L}(E)$. En déduire que A coïncide avec $\mathcal{L}(E)$.

5. (Théorème de Burnside) Soit r un nombre entier strictement positif. Montrer qu'il existe un nombre entier N (qui dépend de n et r) tel que tout sous-groupe $G \subset GL(E)$ (où $GL(E)$ est le groupe général linéaire de E) dont chaque élément est d'ordre inférieur ou égal à r vérifie la propriété suivante : G est fini et son cardinal est inférieur ou égal à N.

Exercice 3

La taille d'un ensemble fini S est dénotée par $|S|$.

Pour un ensemble fini S, on dénote par $\mathbb{R}^S$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions $g : S \to \mathbb{R}$. Pour une fonction $g \in \mathbb{R}^S$, la moyenne de g sur S est dénotée par $\mathbb{E}(g) := \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} g(s)$.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^S$ est muni du produit scalaire $(g, h) := \mathbb{E}(g.h) = \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} g(s)h(s)$, pour tout $g, h \in \mathbb{R}^S$ On définit $||g||^2 = (g, g)$.

Pour un sous-ensemble $T \subset S$ et $g \in \mathbb{R}^S$, la restriction de g à T est dénotée par $g_{|T} \in \mathbb{R}^T$.

Pour un sous-ensemble $T \subset S$, la fonction caractéristique de T est notée $\mathbf{1}_T \in \mathbb{R}^S$: elle prend la valeur 1 en tout $t \in T$ et la valeur zéro en dehors de T. La droite engendrée par $\mathbf{1}_T$ dans $\mathbb{R}^S$ est dénotée par L_T.

Rappelons qu'une partition $P = \{V_1, \ldots, V_m\}$ d'un ensemble fini V est une collection $V_1, \ldots, V_m$ de sous-ensembles disjoints de V qui vérifie $\bigcup_{i=1}^m V_i = V$. Une autre partition $Q = \{U_1, \ldots, U_k\}$ de V est un raffinement de P si pour tout $U_j \in Q$, il existe $V_i \in P$ avec $U_j \subseteq V_i$.

*

1. Pour les ensembles finis $T \subseteq S$, montrer que la projection orthogonale d'une fonction $g \in \mathbb{R}^S$ sur la droite L_T est égale à $\mathbb{E}(g_{|T})\mathbf{1}_T$.
2. Montrer qu'une partition P de S donne un ensemble de vecteurs deux à deux orthogonaux $\mathbf{1}_X$, pour $X \in P$.

**

À partir de maintenant, on va supposer que $S = V \times V$ pour un ensemble fini V. Une partition P de V donne une partition $P^2 = \{X \times Y \mid X, Y \in P\}$ de S. Définissons le sous-espace vectoriel L_P de $\mathbb{R}^S$ par

$$L_P := \bigoplus_{X,Y \in P} L_{X \times Y},$$

et notons π_P la projection orthogonale de $\mathbb{R}^S$ sur L_P.
3. Montrer que si une partition Q est un raffinement d'une partition P de V, alors $\pi_P \circ \pi_Q = \pi_P$. En particulier, pour tout $g \in \mathbb{R}^S$, nous avons $||\pi_Q(g)||^2 = ||\pi_Q(g) - \pi_P(g)||^2 + ||\pi_P(g)||^2$.

Soit maintenant $f : S \to \{0, 1\}$ une fonction Booléenne fixe. Pour les ensembles $X, Y \subset V$, on définit

$$\mu_{X,Y} := \mathbb{E}(f_{|X \times Y}) = \frac{1}{|X||Y|} \sum_{x \in X, y \in Y} f(x, y).$$

Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel positif fixe. Le couple (X, Y) est dit ϵ-régulier par rapport à la fonction f si toute paire de sous-ensembles $A \subset X$ et $B \subset Y$ de tailles $|A| \geq \epsilon|X|$ et $|B| \geq \epsilon|Y|$ vérifient $|\mu_{A,B} - \mu_{X,Y}| \leq \epsilon$; sinon, (X, Y) est dit ϵ-irrégulier.

4. Soient $X, Y \subset V$. Soit $g : X \times Y \to [-1, 1]$ la fonction définie par $g := f_{|X \times Y} - \mu_{X,Y}$. Prouver que si (X, Y) est ϵ-régulier pour f, alors pour toute paire de fonctions $\alpha : X \to [0, 1]$ et $\beta : Y \to [0, 1]$, on a l'inégalité $|\,\mathbb{E}(g\alpha\beta)\,| \leq \epsilon$.
Ici la fonction $g\alpha\beta \in \mathbb{R}^{X \times Y}$ prend la valeur $g(x, y)\alpha(x)\beta(y)$ en $(x, y) \in X \times Y$.

Indication : traiter d'abord le cas $\alpha = \mathbf{1}_A$ et $\beta = \mathbf{1}_B$ pour les sous-ensembles $A \subseteq X$ et $B \subseteq Y$.

***

Pour une partition P de V, on définit la fonction d'irrégularité $\mathrm{Irr}_P : S \to \{0, 1\}$ par $\mathrm{Irr}_P(x, y) = 1$ si et seulement si $(x, y) \in X \times Y$ pour un couple ϵ-irrégulier (X, Y), $X, Y \in P$.

Une partition P est dite ϵ-régulière si $||\mathrm{Irr}_P||^2 = \mathbb{E}(\mathrm{Irr}_P) \leq \epsilon$, autrement dit, si

$$\sum_{\substack{X,Y \in P \\ (X,Y)\ \epsilon-\text{irrégulier}}} |X||Y| \leq \epsilon|V|^2.$$

5. Soit X un ensemble fini et $M_1, \ldots, M_k$ une famille de sous-ensembles de X. Prouver qu'il existe une partition Q_X de X de taille au plus 2^k telle que chaque M_i est une union disjointe d'éléments de Q_X.

6. Prouver que toute partition ϵ-irrégulière P de V possède un raffinement Q de taille $|Q| \leq |P|4^{|P|}$ qui vérifie $||\pi_Q(f)||^2 \geq ||\pi_P(f)||^2 + \epsilon^5$.

****

Soit $\epsilon > 0$ un nombre réel positif fixe. Une partition $P = \{X_1, \ldots, X_m\}$ de V est dite ϵ-équilibrée s'il existe un sous-ensemble $I \subset \{1, \ldots, m\}$ qui vérifie

- pour $i, j \in I$, on a $|X_i| = |X_j|$, et
- $|\,\bigcup_{i \notin I} X_i\,| \leq \epsilon|V|$.

7. Montrer qu'une partition P de V contient un raffinement Q tel que la partition Q soit ϵ-équilibrée et $|Q| \leq (1 + \epsilon^{-1})|P|$.

*****

8. (Lemme de régularité de Szemerédi) Prouver qu'un nombre fini d'itérations de 6. et 7. montre que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un entier N_ϵ tel que pour tout ensemble fini V et toute fonction Booléenne f sur $S = V \times V$, il existe une partition ϵ-équilibrée et ϵ-régulière P de V de taille bornée par N_ϵ.

******

Soit maintenant $P = \{X_1, \dots, X_m\}$ une partition ϵ-ǵuilibrée et ϵ-régulière de V pour une fonction $f : S \to \{0, 1\}$ telle que $m \leq N_\epsilon$ (dont l'existence est garantie par la question 8.), et soit $k \leq m$ avec $|X_1| = \cdots = |X_k|$, et $|X_{k+1} \cup \cdots \cup X_m| \leq \epsilon|V|$. Soit R l'union de tous les $X_i \times X_j$ pour les indices $1 \leq i, j \leq k$ dont le couple (X_i, X_j) est ϵ-régulier et vérifie $\mu_{X_i,X_j} \geq 2\epsilon$.

Considérer la décomposition de f en la somme des fonctions Booléennes f_b et f_s, où $f_\mathrm{b} = \mathbf{1}_R.f$ et $f_s = f - \mathbf{1}_R.f$.

9. Montrer que f_s est de petite norme (en fonction de ϵ).

10. Prouver la propriété suivante de f_b : soit n un nombre entier positif. Un n-cycle $\mathbf{x}$ pour f_b est un n-uplet $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ tel que $f_\mathrm{b}(x_1, x_2) = f_\mathrm{b}(x_2, x_3) = \cdots = f_\mathrm{b}(x_n, x_1) = 1$. Alors soit f_b ne contient aucun n-cycle ou il contient au moins $(2^n - n)\left(\frac{\epsilon(1-\epsilon)}{m}\right)^n |V|^n$ n-cycles.

Indication : observer que le nombre de tels n-cycles $\mathbf{x}$ avec $\mathbf{x} \in X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n}$ est donné par $\sum_{\mathbf{x} \in X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_n}} f(x_1, x_2) f(x_2, x_3) \dots f(x_n, x_1)$. Écrire $f_{|X_i \times X_j} = g_{i,j} + \mu_{X_i,X_j}$ comme dans 4., et appliquer plusieurs fois 4.

11. Quelle est l'extension de 10. à d'autres motifs remplaçant les cycles ?